Pobrane z czasopisma Annales H - Oeconomia **http://oeconomia.annales.umcs.pl**
Data: 30/10/2026 18:27:02

DOI:10.17951/h.2017.51.5.293

ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN – POLONIA

VOL. LI, 5 SECTIO H 2017

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu. Wydział Zarządzania

JOANNA SIWEK

joanna.siwek@ue.poznan.pl

Portfel wieloskładnikowy z nieprecyzyjną wartością bieżącą daną trapezoidalną liczby rozmytej

Two-Asset Portfolio – Case of Present Value Given as a Trapezoidal Fuzzy Number

Słowa kluczowe: nieprecyzyjność; wartość bieżąca; liczby rozmyte

Keywords: present value; imprecision; fuzzy numbers

Kod JEL: C44; C02; G10

Wstęp

Powszechnie ryzyko w języku polskim jest rozumiane jako działanie, które niesie ze sobą pewne potencjalnie niepożądane skutki. Tym samym pojęcie to jest nacechowane negatywnie. Tworząc portfel aktywów finansowych, inwestor kieruje się minimalizacją szeroko rozumianego ryzyka, a więc możliwością ograniczenia negatywnych skutków swojej decyzji. Jednakże, pomimo założenia o efektywności rynku i racjonalności inwestora, nadal zawierane są przeciwstawne transakcje. Może to oznaczać, że przesłanki, którymi kierują się inwestorzy, mogą być nieprecyzyjne.

Nie należy w tym miejscu mylić nieprecyzyjności z niepewnością. Niepewność bowiem oznacza brak wiedzy o przyszłym stanie świata, mającą skutek w tym, iż nie jesteśmy w stanie przewidzieć następstw podjętej decyzji. Powszechnie używanym narzędziem pomiaru niepewności jest rachunek prawdopodobieństwa.

Nieprecyzyjność informacji rozumiemy za Klirem [1993] jako jej wieloznaczność i nieostrość. Wieloznaczność oznacza niemożność rozróżnienia pomiędzy wie-

Pobrane z czasopisma Annales H - Oeconomia **http://oeconomia.annales.umcs.pl**
Data: 30/10/2026 18:27:02

loma możliwymi wariantami decyzyjnymi. Nieostrość natomiast to niemożność rozróżnienia pomiędzy informacją a jej zaprzeczeniem. Wieloznaczność może stanowić źródło ryzyka wieloznaczności, a zatem możliwość wyboru alternatywy, której skutkiem jest utrata szansy na lepszy zysk. Z kolei nieostrość jest źródłem ryzyka polegającego na wyborze alternatywy nierekomendowanej.

Źródło wspomnianej nieprecyzyjności stanowią subiektywizm i preferencje decydenta kierującego się takimi czynnikami, jak doświadczenie, wiedza, awersja do ryzyka czy przyzwyczajenie. Innym źródłem nieprecyzyjności przesłanek decyzyjnych mogą być możliwe opóźnienia sprzętowe, jakość sprzętu komputerowego i oprogramowania, jak również subiektywizm wyboru algorytmów zaimplementowanych w systemach.

Intuicyjnym narzędziem ujęcia nieprecyzyjności są zbiory rozmyte. Zostały one wprowadzone przez Zadeha [1965]. Z czasem prężnie zaczęła rozwijać się rozmyta arytmetyka finansowa. Pojęcie wartości bieżącej jako zdyskontowanej wartości przyszłych rozmytych przepływów pieniężnych zostało wprowadzone przez Warda [1985]. Zastosowania zbiorów i liczb rozmytych do modelowania wartości bieżącej netto w finansach można znaleźć m.in. w pracach Kuchty [2011] i Lesage'a [2001].

Gwałtowny rozwój arytmetyki rozmytej zaowocował stworzeniem rozmytej analizy portfelowej. Główną ideą tego podejścia było zastosowanie istniejącej teorii portfela i rozmycie części rozważanych parametrów, takich jak zwrot lub wartość bieżąca [Huang, 2007, 2012; Wang, Zhu, 2002; Li, Quin, Kar, 2010], lub rozmycie parametrów rozkładów prawdopodobieństwa [Tanaka, Guo, Turksen, 2000]. Pełne kompendium wiedzy na temat rozmytych portfeli można znaleźć w opracowaniu Fanga, Lai i Wanga [2008].

Celem niniejszego artykułu jest analiza portfela wieloskładnikowego pod kątem ryzyka nieprecyzyjności i jej wyjaśnienie na podstawie studium przypadku.

1. Elementy teorii liczb rozmytych

Niech $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów rozmytych na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$. Liczbę rozmytą definiujemy za Dubois i Prade [1980] jako podzbiór rozmyty $L \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ o ograniczonym nośniku:

$$\mathbb{S}(L) = \{x \in \mathbb{R}: \mu_L(x) > 0\} \tag{1}$$

reprezentowany przez swą funkcję przynależności $\mu_L \in [0;1]^{\mathbb{R}}$, spełniającą warunki:

$$\begin{gathered} \exists_{x \in \mathbb{S}(L)}\ \mu_L(x) = 1 \\ \forall_{(x,y,z) \in (\mathbb{S}(L))^3}: x \le y \le z \Longrightarrow \mu_L(y) \ge min\{\mu_L(x); \mu_L(z)\} \end{gathered} \tag{2}$$

Pobrane z czasopisma Annales H - Oeconomia **http://oeconomia.annales.umcs.pl**
Data: 30/10/2026 18:27:02

Rozważmy parę liczb rozmytych (L_1, L_2) z odpowiadającymi im funkcjami przynależności $\mu_{L_1} \in [0;1]^{\mathbb{R}}$ i $\mu_{L_2} \in [0;1]^{\mathbb{R}}$. Zgodnie z zasadą rozszerzenia Zadeha [1965] suma $L_1 \oplus L_2$ jest również liczbą rozmytą z funkcją przynależności $\mu_{L_1 \oplus L_2} \in [0;1]^{\mathbb{R}}$, gdzie:

$$\begin{gathered} \mathbb{S}(L_1 \oplus L_2) = \{z \in \mathbb{R}: \exists_{(x;y)\in \mathbb{S}(L_1)\times \mathbb{S}(L_2)}: z = x + y\} \\ \mu_{L_1 \oplus L_2}(z) = \sup\{\min\{\mu_{L_1}(x);\ \mu_{L_2}(y)\}: (x;y) \in \mathbb{S}(L_1) \times \mathbb{S}(L_2), z = x + y\} \end{gathered} \tag{3}$$

Podobnie przemnożenie liczby rozmytej L przez skalar $r \in \mathbb{R}^+$ definiujemy jako iloczyn $r \odot L$ opisany funkcją przynależności $\mu_{r\odot L} \in [0;1]^{\mathbb{R}}$, gdzie:

$$\begin{gathered} \mathbb{S}(r \odot L) = \{z \in \mathbb{R}: \exists_{y\in \mathbb{S}(L)}: z = r \cdot y\} \\ \mu_{r\odot L}(z) = \mu_L\left(\frac{z}{r}\right) \end{gathered} \tag{4}$$

Dla dowolnych $a \le b \le c \le d, a, b, c, d \in \mathbb{S}(Tr(a;b;c;d))$ trapezoidalna liczba rozmyta $Tr(a;b;c;d)$ dana jest funkcją przynależności $\mu_{Tr}(\cdot\,|a;b;c;d): \mathbb{R} \to [0;1]$:

$$\mu_{Tr}(x|a;b;c;d) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a} \text{ dla } a \le x < b \\ 1 \text{ dla } b \le x \le c \\ \dfrac{x-d}{c-d} \text{ dla } c < x \le d \\ 0 \text{ dla } x < a \vee x > d \end{cases} \tag{5}$$

gdzie nośnik jest w postaci $\mathbb{S}(Tr(a;b;c;d)) =]a;d[$.

Ryzyko wieloznaczności oceniać będziemy za pomocą miary energii [Khalili, 1979]. Miara ta jest dla dowolnych liczb rozmytych $L \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ równa:

$$d(L) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_L(x)dx \tag{6}$$

Ryzyko nieostrości będziemy oceniać za pomocą miary entropii. Dla dowolnej liczby rozmytej $L \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ miara ta jest równa [Kosko, 1990]:

$$e(L) = \frac{d(L \cap L^C)}{d(L \cup L^C)} \tag{7}$$

Miary energii i entropii są właściwymi narzędziami do pomiaru ryzyka nieprecyzyjności obarczającego portfel uwzględniający informację rozmytą [Luca, Termini, 1972; Zhou, Cai, Tong, 2013].

Pobrane z czasopisma Annales H - Oeconomia **http://oeconomia.annales.umcs.pl**
Data: 30/10/2026 18:27:02

2. Założenia modelu

Trapezoidalna liczba rozmyta ma szczególne zastosowanie jako model nieprecyzyjnej wartości bieżącej w przypadku, kiedy decydent podaje swoje preferencje w formie przedziału. Posiada ona również możliwości uwzględniania opóźnień sprzętowych pomiędzy pozyskaniem informacji a podjęciem decyzji inwestycyjnej. Nawiązując do modelu przedstawionego w pracy Piaseckiego [2011] oraz Siwek [2015a, 2015b], w niniejszym opracowaniu zostały zastosowane następujące założenia szczegółowe:

- badane są proste stopy zwrotu z instrumentów o rozkładzie normalnym $N(\bar{r};\sigma)$,
- wartość przyszła jest zmienną losową $\tilde{V}_t: \Omega \to \mathbb{R}$,
- wartość bieżąca dana jest trapezoidalną liczbą rozmytą.

W przypadku nieprecyzyjnej wartości bieżącej PV^i instrumentu A_i modelowanej trapezoidalną liczbą rozmytą $Tr\left(\check{C}^i{}_{min}, \check{C}_*{}^i, \check{C}^{*i}, \check{C}^i{}_{max}\right)$ PV^i jest określona przez swoją funkcję przynależności $\mu_i \in [0;1]^{\mathbb{R}}$:

$$\mu_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \check{C}^i{}_{min}}{\check{C}_*{}^i - \check{C}^i{}_{min}} \text{ dla } \check{C}^i{}_{min} \le x < \check{C}_*{}^i \\ 1 \text{ dla } \check{C}_*{}^i \le x \le \check{C}^{*i} \\ \dfrac{x - \check{C}^i{}_{max}}{\check{C}^{*i} - \check{C}^i{}_{max}} \text{ dla } \check{C}^{*i} < x \le \check{C}^i{}_{max} \\ 0 \text{ dla } x < \check{C}^i{}_{min}, x > \check{C}^i{}_{max} \end{cases} \tag{8}$$

gdzie:

$\check{C}^i$ – cena rynkowa instrumentu obserwowana w momencie wyznaczania jego wartości bieżącej

$\check{C}^i{}_{min} \in]0;\check{C}]$ – maksymalne dolne oszacowanie możliwej ceny rynkowej

$\check{C}^i{}_{max} \in [\check{C};+\infty[$ – minimalne górne oszacowanie możliwej ceny rynkowej

$\check{C}_*{}^i \in [\check{C}_{min};\check{C}]$ – minimalne górne oszacowanie cen zauważalnie mniejszych od obserwowanej ceny rynkowej $\check{C}$

$\check{C}^{*i} \in [\check{C};\check{C}_{max}]$ – maksymalne dolne oszacowanie cen zauważalnie większych od obserwowanej ceny rynkowej $\check{C}$

Stąd parametry $\check{C}^i{}_{min}, \check{C}_*{}^i, \check{C}^{*i}, \check{C}^i{}_{max} \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Za Markowitzem [1952] zakładamy, że prosta stopa zwrotu $\tilde{r}_t{}^i: \Omega \to \mathbb{R}$ wyznaczona z:

$$\tilde{r}_t{}^i = \frac{\tilde{V}_t{}^i(\omega) - \check{C}^i}{\check{C}^i} \tag{9}$$

Pobrane z czasopisma Annales H - Oeconomia **http://oeconomia.annales.umcs.pl**
Data: 30/10/2026 18:27:02

dla PV^i równej cenie rynkowej $\check{C}^i$ ma normalny rozkład prawdopodobieństwa $N(\bar{r}_i; \sigma_i)$. Zmienna losowa FV^i jest określona wtedy za pomocą zależności:

$$\tilde{V}_t^{\,i}(\omega) = \check{C}^i \cdot \left(1 + \tilde{r}_t^{\,i}(\omega)\right) \tag{10}$$

Zgodnie z zasadą rozszerzenia Zadeha prosta stopa zwrotu wyznaczona dla tak oszacowanej PV^i jest rozmytym zbiorem probabilistycznym $\tilde{R}^i$ [Hirota, 1981], reprezentowanym przez swą funkcję przynależności $\widetilde{\rho_i} \in [0;1]^{\mathbb{R}\times\Omega}$ daną za pomocą tożsamości:

$$\widetilde{\rho_i}(r;\omega) = \sup\left\{\mu_i(x): x = \frac{\tilde{V}_t^{\,i}(\omega)}{1+r}, x \in \mathbb{R}\right\} = \mu_i\left(\frac{\check{C}^i \cdot \left(1 + \tilde{r}_t^{\,i}(\omega)\right)}{1+r}\right) \tag{11}$$

W tej sytuacji oczekiwana rozmyta stopa zwrotu $R^i \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ z instrumentu o $PV^i = Tr\left(\check{C}^i{}_{min}, \check{C}_*^{\,i}, \check{C}^{*i}, \check{C}^i{}_{max}\right)$ jest liczbą rozmytą z funkcją przynależności $\rho_i \in [0;1]^{\mathbb{R}}$:

$$\rho_i(r) = \begin{cases} \dfrac{\dfrac{\check{C}^i \cdot \left(1+\bar{r}^i\right)}{1+r} - \check{C}^i{}_{min}}{\check{C}_*^{\,i} - \check{C}^i{}_{min}} \text{ dla } \check{C}^i{}_{min} \le \dfrac{\check{C}^i \cdot \left(1+\bar{r}^i\right)}{1+r} \le \check{C}_*^{\,i} \\ 1 \text{ dla } \check{C}_*^{\,i} < \dfrac{\check{C}^i \cdot \left(1+\bar{r}^i\right)}{1+r} < \check{C}^{*i} \\ \dfrac{\dfrac{\check{C}^i \cdot \left(1+\bar{r}^i\right)}{1+r} - \check{C}^i{}_{max}}{\check{C}^{*i} - \check{C}^i{}_{max}} \text{ dla } \check{C}^{*i} \le \dfrac{\check{C}^i \cdot \left(1+\bar{r}^i\right)}{1+r} \le \check{C}^i{}_{max} \\ 0 \text{ dla } \check{C}^i{}_{min} \ge \dfrac{\check{C}^i \cdot \left(1+\bar{r}^i\right)}{1+r}, \dfrac{\check{C}^i \cdot \left(1+\bar{r}^i\right)}{1+r} \ge \check{C}^i{}_{max} \end{cases} \tag{12}$$

Można zauważyć, że dla tak określonej oczekiwanej stopy zwrotu z dowolnego instrumentu A_i o wartości bieżącej modelowanej trapezoidalną liczbą rozmytą, oczekiwana stopa zwrotu nie jest niestety trapezoidalną liczbą rozmytą. Znacznie utrudnia to obliczanie miar ryzyka wieloznaczności i nieostrości dla badanej stopy zwrotu, co powoduje brak możliwości analizy portfelowej, stwierdzony już dla trójkątnych liczb rozmytych przez Piaseckiego i Siwek [2017]. W celu rozwiązania tego problemu, podobnie jak we wspomnianej pracy, powyższe rozumowanie zostanie powtórzone dla czynnika dyskontującego.

Pobrane z czasopisma Annales H - Oeconomia **http://oeconomia.annales.umcs.pl**
Data: 30/10/2026 18:27:02

3. Czynnik dyskontujący

Podobnie jak w pracy Piaseckiego i Siwek [2017] wprowadźmy czynnik dyskonta ${v_t}^i$ wyznaczony za pomocą stopy zwrotu ${r_t}^i$ dla dowolnego instrumentu A_i spełniający warunek:

$$\eta_i(v) = \eta_i\left(\frac{1}{1+r}\right) = \rho_i(r) \tag{13}$$

gdzie $\eta_i: \mathbb{R} \to [0;1]$ jest funkcją przynależności czynnika dyskonta $D^i \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ wyznaczonego za pomocą oczekiwanej stopy zwrotu $R^i \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Zestawiając (13) i (16), otrzymujemy:

$$\eta_i(v) = \begin{cases} \dfrac{\check{C}^i v - \bar{v}_i \cdot {\check{C}^i}_{min}}{\bar{v}_i \cdot {\check{C}_*}^i - \bar{v}_i \cdot {\check{C}^i}_{min}} \text{ dla } \dfrac{\bar{v}_i}{\check{C}^i} \cdot {\check{C}^i}_{min} \le v \le \dfrac{\bar{v}_i}{\check{C}^i} \cdot {\check{C}_*}^i \\ 1 \text{ dla } \dfrac{\bar{v}_i}{\check{C}^i} \cdot {\check{C}_*}^i < v < \dfrac{\bar{v}_i}{\check{C}^i} \cdot {\check{C}^{*i}} \\ \dfrac{\check{C}^i v - \bar{v}_i \cdot {\check{C}^i}_{max}}{\bar{v}_i \cdot {\check{C}^*}^i - \bar{v}_i \cdot {\check{C}^i}_{max}} \text{ dla } \dfrac{\bar{v}_i}{\check{C}^i} \cdot {\check{C}^*}^i < v \le \dfrac{\bar{v}_i}{\check{C}^i} \cdot {\check{C}^i}_{max} \\ 1 \text{ dla } \dfrac{\bar{v}_i}{\check{C}^i} \cdot {\check{C}^i}_{max} < v, v < \dfrac{\bar{v}_i}{\check{C}^i} \cdot {\check{C}^i}_{min} \end{cases} \tag{14}$$

gdzie $\bar{v}_i$ jest czynnikiem dyskontującym wyznaczonym za pomocą oczekiwanej stopy zwrotu $\bar{r}_i$. Łatwo zauważyć, że wyznaczony powyżej oczekiwany czynnik dyskonta jest rozmytą liczbą trapezoidalną $Tr\left(\frac{\bar{v}_i}{\check{C}^i} \cdot {\check{C}^i}_{min}; \frac{\bar{v}_i}{\check{C}^i} \cdot {\check{C}_*}^i; \frac{\bar{v}_i}{\check{C}^i} \cdot {\check{C}^*}^i; \frac{\bar{v}_i}{\check{C}^i} \cdot {\check{C}^i}_{max}\right)$.

Ryzyko wieloznaczności obarczające oczekiwany czynnik dyskonta $D^i \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ z instrumentu A_i oceniamy miarą energii. Zgodnie z (3) miara ta dla D^i będącego trapezoidalną liczbą rozmytą $Tr\left(\frac{\bar{v}_i}{\check{C}^i} \cdot {\check{C}^i}_{min}; \frac{\bar{v}_i}{\check{C}^i} \cdot {\check{C}_*}^i; \frac{\bar{v}_i}{\check{C}^i} \cdot {\check{C}^*}^i; \frac{\bar{v}_i}{\check{C}^i} \cdot {\check{C}^i}_{max}\right)$ jest równa:

$$d\left(D^i\right) = \frac{\overline{v_i}}{2 \cdot \check{C}^i} \cdot \left({\check{C}^*}^i + {\check{C}^i}_{max} - {\check{C}^i}_{min} - {\check{C}_*}^i\right) \tag{15}$$

Ryzyko nieostrości obarczające oczekiwany czynnik dyskonta $D^i \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ oceniamy miarą entropii. W przypadku trapezoidalnej liczby rozmytej miara ta jest równa:

$$e(D^i) = \frac{{\check{C}_*}^i - {\check{C}^i}_{min} + {\check{C}^i}_{max} - {\check{C}^*}^i}{-{\check{C}_*}^i - 3 \cdot {\check{C}^i}_{min} + 3 \cdot {\check{C}^i}_{max} + {\check{C}^*}^i} \tag{16}$$

Pobrane z czasopisma Annales H - Oeconomia **http://oeconomia.annales.umcs.pl**
Data: 30/10/2026 18:27:02

4. Portfel wieloskładnikowy

Przez portfel będziemy rozumieć dowolny, skończenie elementowy zbiór instrumentów finansowych. Każdy z tych instrumentów jest charakteryzowany przez oszacowaną wartość bieżącą i przewidywaną wartość przyszłą.

Przejdźmy do konstrukcji nieprecyzyjnego portfela wieloskładnikowego π, złożonego z instrumentów finansowych A_i, $i = 1,2,..,n$. Za Markowitzem [1952] zakładamy, że dla każdego instrumentu A_i znamy rozkład prawdopodobieństwa prostej stopy zwrotu $\tilde{r}_t^i{:}\Omega \to \mathbb{R}$ wyznaczonej za pomocą (9) dla PV^i równej cenie rynkowej $\check{C}^i$. Tak jak Markowitz zakładamy, że dwuwymiarowa zmienna losowa $(\tilde{r}_t^1; \tilde{r}_t^2; \ldots; \tilde{r}_t^n)^T$ ma łączny rozkład normalny $N((\bar{r}_1; \bar{r}_2; \ldots; \bar{r}_n)^{\mathrm{T}}; \Sigma)$. Udział p_i instrumentu A_i w portfelu π jest dany zależnością:

$$p_i = \frac{\check{C}^i}{\sum_{k=1}^{n} \check{C}^i} \tag{17}$$

Portfelowi π przypisujemy jego *FV* za pomocą wzoru:

$$\tilde{V}_t^{\pi}(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{V}_t^i(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \check{C}^i \left(1 + \tilde{r}_t^i(\omega)\right) = \check{C}^{\pi}\left(1 + \tilde{r}_t(\omega)\right) \tag{18}$$

gdzie:

$$\tilde{r}_t(\omega) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \tilde{r}_t^i(\omega) \tag{19}$$

jest stopą zwrotu z portfela π. Oczekiwana stopa zwrotu z portfela jest równa:

$$\bar{r} = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \bar{r}_i \tag{20}$$

Analiza rozmytej stopy zwrotu z portfela prowadzi do występowania pewnych trudności. Przede wszystkim oczekiwana rozmyta stopa zwrotu z portfela o *PV* danym trapezoidalną liczbą rozmytą nie spełnia założeń tej liczby. Znacznie utrudnia to pomiar ryzyka energii i entropii. W celu ułatwienia obliczeń, przy zachowaniu tego samego waloru informacyjnego, można portfelowi π, podobnie jak w pracy Piaseckiego i Siwek [2017], przypisać oczekiwany czynnik dyskontujący $D^{\pi} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ określony za pomocą zależności:

$$D = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{\overline{v}_i}\right)^{-1} \odot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i}{\overline{v}_i} \odot D_i\right) \tag{21}$$

Dzięki temu miarę energii oczekiwanego czynnika dyskonta $D^{\pi} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ możemy za Piaseckim i Siwek [2017] określić jako:

Pobrane z czasopisma Annales H - Oeconomia **http://oeconomia.annales.umcs.pl**
Data: 30/10/2026 18:27:02

$$d(D^{\pi}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{\bar{v}_i}\right)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_i}{\bar{v}_i} \cdot d(D^i)\right) \tag{22}$$

Oznacza to, że miara energii oczekiwanego czynnika dyskonta portfela π jest kombinacją liniową miar energii oczekiwanych czynników dyskontujących jego składników. Wagi przypisane poszczególnym A_i są wprost proporcjonalne do ich udziału p_i w portfelu i odwrotnie proporcjonalne do ich czynnika dyskonta $\bar{v}_i$. Stąd, dążąc do minimalizacji ryzyka wieloznaczności portfela, należy przede wszystkim minimalizować ryzyko wieloznaczności tych składników, które charakteryzują się najwyższymi oczekiwanymi stopami zwrotu. Wynika to z faktu, że wartości udziałów p_i są określane *post factum*, po zebraniu wszystkich dostępnych informacji na temat składników portfela [Piasecki, Siwek, 2017].

Zgodnie z (18) miara entropii oczekiwanego czynnika dyskonta portfela π jest równa:

$$e(D^{\pi}) = \frac{\check{C}_* - \check{C}_{min} + \check{C}_{max} - \check{C}^*}{-\check{C}_*^{\pi} - 3 \cdot \check{C}_{min} + 3 \cdot \check{C}_{max} + \check{C}^*} \tag{23}$$

5. Studium przypadku

W celu wizualizacji wieloznaczności i nieostrości informacji w różnych sektorach gospodarki rozpatrzmy akcje spółek BZ WBK, Enea, KGHM i Orange z okresu około jednego roku, tj. pomiędzy 26 października 2015 r. a 25 listopada 2016 r., z wartościami bieżącymi podanymi w postaci trapezoidalnych liczb rozmytych. Instrumentom tym przypisujemy kolejno oznaczenia $A_i, i = 1, \ldots, 4$. Na podstawie danych historycznych oraz subiektywnej oceny inwestora wyliczono wartość bieżącą każdego z nich, wyznaczoną na dzień 25 listopada 2016 r., a wyniki zamieszczono w tab. 1.

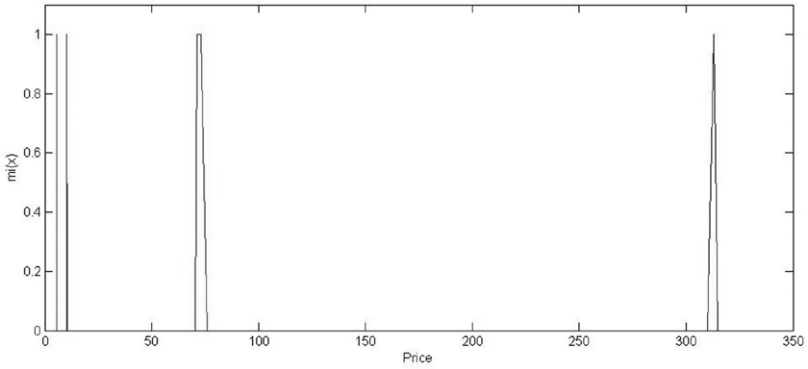
Tab. 1. Parametry trapezoidalnych liczb rozmytych, modelujących wartości bieżące instrumentów A_i

Instrument\Parametr	$\check{C}^i{}_{min}$	$\check{C}_*{}^i$	$\check{C}^{*i}$	$\check{C}^i{}_{max}$
A_1	310,0	311,0	314,0	317,0
A_2	10,1	10,2	10,3	10,5
A_3	70,5	71,0	73,0	75,0
A_4	5,5	5,55	5,65	5,7

Źródło: obliczenia własne.

Wykresy funkcji przynależności tych liczb zostały przedstawione na rys. 1.

Pobrane z czasopisma Annales H - Oeconomia **http://oeconomia.annales.umcs.pl**
Data: 30/10/2026 18:27:02



Rys. 1. Funkcje przynależności dla proponowanych wartości bieżących instrumentów A_i

Źródło: obliczenia własne.

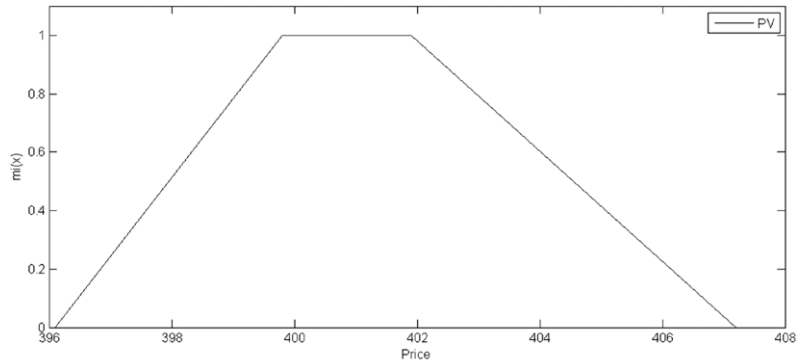
Tworzymy portfel złożony z A_i o udziałach p_i , $i = 1, \ldots, 4$. Na podstawie ceny rynkowej instrumentów wyliczamy ich udziały w portfelu (tab. 2).

Tab. 2. Udziały instrumentów A_iw portfelu

Instrument	A_1	A_2	A_3	A_4
Udział	0,7806	0,0256	0,1498	0,0140

Źródło: obliczenia własne.

Tym samym wartość bieżąca portfela wynosi $T(396{,}1; 397{,}75; 402{,}95; 407{,}02)$.



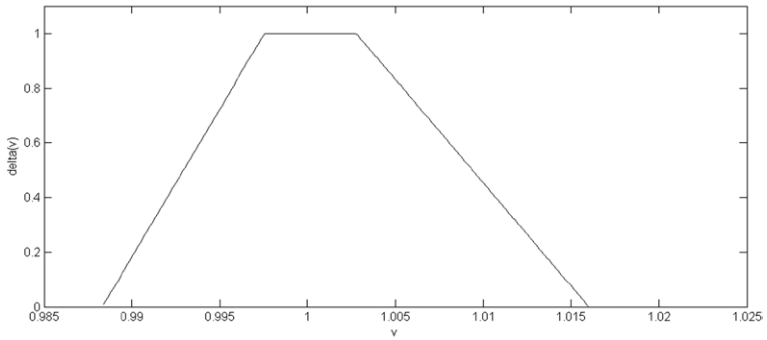
Rys. 2. Funkcja przynależności *PV* portfela złożonego z instrumentów A_i

Źródło: obliczenia własne.

Obliczona na podstawie danych historycznych 4-wymiarowa zmienna losowa $(\tilde{r}_t^1; \tilde{r}_t^2; \tilde{r}_t^3; \tilde{r}_t^4)$ ma rozkład łączny $\mathrm{N}((-0{,}0046; -0{,}0031; 0{,}0109; -0{,}0034)^{\mathrm{T}}; \Sigma)$, gdzie Σ to macierz kowariancji tej zmiennej. Dla instrumentów i zbudowanego

Pobrane z czasopisma Annales H - Oeconomia **http://oeconomia.annales.umcs.pl**
Data: 30/10/2026 18:27:02

portfela wyznaczamy teraz, korzystając z (14) i (21), oczekiwane czynniki dyskontujące. Zbiór rozmyty, odpowiadający oczekiwanemu czynnikowi dyskontującemu z portfela, został przedstawiony na rys. 3.



Rys. 3. Funkcja przynależności dla oczekiwanego czynnika dyskontującego z portfela

Źródło: obliczenia własne.

Korzystając z (15) i (22) wyznaczamy miary energii dla oczekiwanego czynnika dyskontującego każdego z instrumentów oraz portfela (tab. 3).

Tab. 3. Miary energii dla oczekiwanych czynników dyskontujących portfela oraz jego składników

Rozmyty oczekiwany czynnik dyskontujący	D^1	D^2	D^3	D^4	D^π
Energia	0,0080	0,0196	0,0515	0,0269	0,0165

Źródło: obliczenia własne.

Wartość entropii dla oczekiwanego czynnika dyskontującego instrumentów oraz portfela wskazano w tab. 4.

Tab. 4. Miary entropii dla oczekiwanych czynników dyskontujących portfela oraz jego składników

Rozmyty oczekiwany czynnik dyskontujący	D^1	D^2	D^3	D^4	D^π
Entropia	0,1667	0,2308	0,1612	0,1429	0,1663

Źródło: własne obliczenia.

Stąd otrzymujemy:

$$d(D^1) < d(D^\pi) < d(D^2) < d(D^4) < d(D^3)$$
$$e(D^4) < e(D^3) < e(D^\pi) < e(D^1) < e(D^2) \quad (24)$$

Miara energii dla portfela jest wartością pośrednią pomiędzy miarami energii dla instrumentów. Podobnie zachowuje się entropia rozważanego czynnika dyskontującego.

Pobrane z czasopisma Annales H - Oeconomia **http://oeconomia.annales.umcs.pl**
Data: 30/10/2026 18:27:02

Podsumowanie

Z przeprowadzonych badań wynika, że miary energii i entropii czynnika dyskontującego są dobrym narzędziem pomiaru ryzyka nieprecyzyjności obarczającego portfel aktywów finansowych. Ryzyko to, zgodnie z odczuciami inwestora, nie jest minimalizowane przez dywersyfikację portfela. Głównym powodem tej sytuacji jest fakt, że zdefiniowane miary energii i entropii oczekiwanego czynnika dyskontującego portfela nie zależą od ilości jego instrumentów składowych, a jedynie od wielkości wyliczonych dla rozmytych czynników dyskontujących składników, udziałów oraz oczekiwanych czynników dyskontujących. W związku z tym podczas konstrukcji portfela ryzyko nieprecyzyjności wyrażone energią i entropią może zachowywać się odmiennie od ryzyka związanego z niepewnością przyszłych zdarzeń. W opisanym przykładzie wykazano, że dywersyfikacja portfelowa może zwiększyć ryzyko nieprecyzyjności, czego wyrazem jest energia i entropia czynnika dyskontującego portfela, będąca wartością pośrednią pomiędzy miarami energii i entropii rozmytych czynników dyskontujących instrumentów składowych.

Ze względu na łatwość użycia oraz walory opisowe miary energii i entropii oczekiwanego czynnika dyskontującego stanowią właściwe narzędzie oceny ryzyka nieprecyzyjności instrumentów. Dalszym kierunkiem badań może być stworzenie i rozwiązanie zadania minimalizacji tego ryzyka dla portfela.

Bibliografia

Dubois D., Prade H., *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, "Mathematics in Science and Engineering" 1980, Vol. 144.

Fang Y., Lai K.K., Wang S., *Fuzzy portfolio optimization. Theory and methods*, "Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems" 2008, Vol. 609, **DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-77926-1**.

Hirota K., *Concepts of probabilistic sets*, "Fuzzy Sets and Systems" 1981, Vol. 5, **DOI: https://doi.org/10.1016/0165-0114(81)90032-4**.

Huang X., *Optimal project selection with random fuzzy parameters*, "Computers and Mathematics with Applications" 2012, Vol. 55.

Huang X., *Portfolio selection with fuzzy returns*, "Journal of Intelligent & Fuzzy Systems" 2007, Vol. 18.

Khalili S., *Fuzzy Measures and Mappings*, "Journal of Mathematical Analysis and Applications" 1979, Vol. 68, **DOI: https://doi.org/10.1016/0022-247X(79)90101-X**.

Klir G.J., *Developments In Uncertainty-Based Information*, [w:] M. Yovits (ed.), *Advances in Computers*, Vol. 36, Academic Press, San Diego 1993.

Kosko B., *Fuzziness vs. probability*, "Int. J. General Systems" 1990, Vol. 17, **DOI: https://doi.org/10.1080/03081079008935108**.

Kuchta D., *Project scheduling to maximize fuzzy net present value*, [w:] *Proceedings of the World Congress on engineering*, Vol. 2, London, U.K., 2011.

Lesage C., *Discounted cash-flows analysis. An interactive fuzzy arithmetic approach*, "European Journal of Economic and Social Systems" 2001, Vol. 15(2), **DOI: https://doi.org/10.1051/ejess:2001115**.

Li X., Qin Z., Kar S., *Mean-Variance-Skewness model for portfolio selections with fuzzy returns*, "European Journal of Operational Research" 2010, Vol. 202, **DOI: https://doi.org/10.1016/j.ejor.2009.05.003**.

Pobrane z czasopisma Annales H - Oeconomia **http://oeconomia.annales.umcs.pl**
Data: 30/10/2026 18:27:02

Luca A. De, Termini S., *A definition of non-probabilistic entropy in the setting of fuzzy set theory*, "Information and Control" 1972, Vol. 20, **DOI: https://doi.org/10.1016/S0019-9958(72)90199-4**.

Markowitz H.S.M., *Portfolio selection*, "Journal of Finance" 1952, Vol. 7(1), **DOI: https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x**.

Piasecki K., *Behavioral Present Value*, "SSRN Electronic Journal" 2011, Vol. 1.

Piasecki K., Siwek J., *Portfel dwuskładnikowy z trójkątnymi rozmytymi wartościami bieżącymi – podejście alternatywne*, „Przegląd Statystyczny" 2017, nr 1.

Siwek J., *Portfel dwuskładnikowy – przypadek wartości bieżącej danej trapezoidalną liczbą rozmytą*, „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach" 2015a (w recenzji).

Siwek J., *Portfel dwuskładnikowy – studium przypadku dla wartości bieżącej danej jako trójkątna liczba rozmyta*, „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach" 2015b, z. 241.

Tanaka H., Guo P., Turksen B., *Portfolio selection based on fuzzy probabilities and possibility distributions*, "Fuzzy Sets and Systems" 2000, Vol. 111, **DOI: https://doi.org/10.1016/S0165-0114(98)00041-4**.

Wang S., Zhu S., *On fuzzy portfolio selection problems*, "Fuzzy Optimization and Decision Making" 2002, Vol. 1, **DOI: https://doi.org/10.1023/A:1020907229361**.

Ward T.L., *Discounted fuzzy cash flow analysis*, Fall Industrial Engineering Conference Proceedings, Berkeley 1985.

Zadeh L.A., *Fuzzy sets*, "Information and Control" 1965, Vol. 8, **DOI: https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X**.

Zhou R., Cai R., Tong G., *Applications of entropy in finance: A review*, "Entropy" 2013, Vol. 15, **DOI: https://doi.org/10.3390/e15114909**.

Two-Asset Portfolio – Case of Present Value Given as a Trapezoidal Fuzzy Number

The article includes an analysis of a multiple asset portfolio, paying special attention to an imprecision risk, burdening the component instruments. The imprecision of decision premises is modeled in the imprecisely stated present value of portfolio assets, given subjectively by the investor in the form of trapezoidal fuzzy numbers. Next, for each asset and consisting portfolio we define imprecision measures appointed based on a fuzzy discounting factor. Analyzed theoretical model takes into account not only rational premises of a decision, but also allows for an inclusion of behavioral, technical and technological factors. During the performed research, relations between imprecision risk measures of assets and portfolio were found. Imprecision risk assessments are computed based on energy and entropy measures. Also, a case study is given, presenting mechanics of the model and methods of calculating risk measures. Performed analysis led to formulating some conclusions about the form and behavior of imprecision risk burdening a portfolio.

Portfel wieloskładnikowy z nieprecyzyjną wartością bieżącą daną trapezoidalną liczby rozmytej

Praca zawiera analizę portfela wieloskładnikowego pod kątem ryzyka nieprecyzyjności. Nieprecyzyjność przesłanek decyzyjnych jest modelowana nieprecyzyjnym określeniem wartości bieżącej instrumentów składowych portfela podanej subiektywnie przez inwestora w postaci trapezoidalnej liczby rozmytej. Dla poszczególnych składników oraz skonstruowanego z nich portfela określone są miary obarczającej je nieprecyzyjności, badanej na podstawie rozmytych czynników dyskontujących. Analizowany model teoretyczny, oprócz przesłanek racjonalnych, uwzględnia czynniki behawioralne oraz techniczne i technologiczne wpływające na decydenta. Oceny ryzyka nieprecyzyjności rozważanego portfela dokonano przy pomocy miar energii i entropii. Przedstawiono również studium przypadku prezentujące sposób działania modelu i metody obliczania miar nieprecyzyjności. Na podstawie przeprowadzonych badań sformułowano wnioski dotyczące postaci i zachowania ryzyka nieprecyzyjności portfela.