DOI:10.17951/h.2016.50.4.497

ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN – POLONIA
VOL. L, 4 SECTIO H 2016

Uniwersytet Łódzki. Wydział Ekonomiczno-Socjologiczny

ANNA SZYMAŃSKA

szymanska@uni.lodz.pl

Zastosowanie modelu Bühlmanna-Strauba do estymacji stawek składki netto w systemach bonus-malus ubezpieczeń odpowiedzialności cywilnej posiadaczy pojazdów mechanicznych

The Application of Bühlmann-Straub Model to the Estimation of Net Premium Rates in the Motor Third-Party Liability Insurance of Vehicle Owners

Słowa kluczowe: teoria największej wiarygodności; model Bühlmanna-Strauba; system *bonus-malus*; stawki składki netto; ubezpieczenie odpowiedzialności cywilnej posiadaczy pojazdów mechanicznych

Keywords: credibility theory; Bühlmann-Straub model; *bonus-malus* system; net premium rates; motor third-party liability insurance

Kod JEL: G22; C11; C51

Wstęp

W ubezpieczeniach komunikacyjnych OC proces kalkulacji składki jest złożony z dwóch etapów: taryfikacji *a priori* i *a posteriori*. Pierwszy z nich to wyznaczenie składki netto za pomocą metod aktuarialnych na podstawie znanych ubezpieczycielowi czynników ryzyka, nazywanych podstawowymi zmiennymi taryfikacyjnymi [Ostasiewicz (red.), 2000]. Tak wyznaczona składka, powiększana m.in. o koszty działalności ubezpieczeniowej i dodatek bezpieczeństwa, stanowi tzw. składkę bazową. Drugi etap taryfikacji polega na uwzględnieniu w składce bazowej zwyżek i zniżek uzależnionych od indywidualnych czynników ryzyka ubezpieczonego. Jednym z elementów taryfikacji *a posteriori*, powszechnie stosowanym w Europie, są systemy *bonus-malus* [Lemaire, 1995, s. 3]. Systemy te różnicują składkę w zależności od liczby szkód zgłoszonych przez ubezpieczonego w poprzednim okresie ubezpieczenia. Na polskim rynku ubezpieczyciele oferują systemy *bonus-malus* różniące się pod względem liczby klas, stawkami składki oraz regułami przejścia między klasami systemu [Szymańska, 2014, s. 43]. Oprócz wspomnianych systemów *bonus-malus* zakłady ubezpieczeń mogą stosować inne zniżki i zwyżki w składce, uzależnione od dodatkowych zmiennych taryfikacyjnych, takich jak np. wiek ubezpieczonego, czas posiadania prawa jazdy, posiadanie lub nie dzieci do lat 12, zawód ubezpieczonego, wiek samochodu, używanie samochodu do celów zarobkowych, posiadanie lub nie innego ubezpieczenia w tej samej firmie, kontynuacji ubezpieczenia itd. Kraje Europy używają niewielu (z reguły od jednego do czterech) podstawowych zmiennych taryfikacyjnych. Najwięcej państw (wśród nich Polska) jako główny czynnik taryfikacji stosuje rejon rejestracji pojazdu oraz pojemność silnika. Najczęściej wykorzystywanymi w taryfikacji w Europie zmiennymi dodatkowymi są: wiek ubezpieczonego, używanie pojazdu w celach komercyjnych oraz wiek samochodu.

Celem pracy jest zaproponowanie metody estymacji stawek składki systemu *bonus-malus* opartej na metodzie największej wiarygodności oraz porównanie oszacowanych zwyżek i zniżek składki ze stosowanymi w badanym towarzystwie ubezpieczeniowym. Do estymacji składki największej wiarygodności wykorzystano model Bühlmanna-Strauba. Przykład zastosowania metody zaprezentowano na podstawie danych uzyskanych z jednego towarzystwa ubezpieczeniowego funkcjonującego na polskim rynku, które zastrzegło sobie anonimowość.

1. Kalkulacja składki ubezpieczeniowej metodą wiarygodności

Niech X_{ij} oznacza całkowitą kwotę wypłaconych odszkodowań (lub liczbę roszczeń) dla *i*-tego ubezpieczonego (*i*-tej podgrupy) w *j*-tym roku trwania ubezpieczenia. Załóżmy, że ubezpieczyciel posiada obserwacje x_{ij}, $i=1,...,N$, $j=1,...,t$, będące realizacjami zmiennych losowych X_{ij}. Kwoty wypłat $x_{i,t+1}$ w roku $t+1$ nie są znane.

Załóżmy, że dla każdego *i* rozkład zmiennej losowej X_{ij} zależy od parametru θ_i oraz że zmienne losowe X_{ij} przy danym $\Theta_i = \theta_i$ są niezależne i mają jednakowy rozkład. Wektor losowy $\mathbf{X}_i = (X_{i1},...,X_{it})$ oznacza indywidualną historię ubezpieczenia dla polisy *i* (*i*-tej podgrupy) w portfelu złożonym z *N* polis (podgrup). Celem ubezpieczyciela jest określenie, jaka powinna być składka netto w roku $t+1$ dla kontraktu *i* (*i*-tej podgrupy), jeżeli znany jest wektor $\mathbf{x}_i = (x_{i1},...,x_{it})$.

Zakładając równoważność roszczeń i składek, składka netto $m(\theta_i)$ dla kontraktu *i* (*i*-tej podgrupy) jest określona wzorem:

$$m(\theta_i) = E\left(X_{i,t+1} \middle| \Theta_i = \theta_i\right) \tag{1}$$

Ponieważ nie znamy wartości parametru θ_i, to wartość składki netto jest nieznana. Składka obliczona jako średnia ważona ze składki dla całego portfela, czyli tzw. składki kolektywnej $\mu = EX_{ij} = \frac{1}{Nt}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{t} x_{ij}$ oraz indywidualnej składki $\bar{x}_i = \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t} x_{ij}$ o postaci:

$$m(\theta_i) = Z_i\bar{x}_i + (1 - Z_i)\mu \tag{2}$$

nazywa się składką wiarygodności dla *i*-tego kontraktu (*i*-tej podgrupy), gdzie $Z_i \in [0,1]$ jest współczynnikiem wiarygodności [Kowalczyk, Poprawska, Ronka-Chmielowiec, 2006, s. 89].

Estymator zmiennej $X_{i,t+1}$ nazywa się predyktorem tej zmiennej, natomiast wartość predyktora nazywa się prognozą dla $X_{i,t+1}$ na podstawie obserwacji $x_{i1},\ldots,x_t$. Podstawą teorii wiarygodności jest bayesowska analiza statystyczna z kwadratową funkcją straty [Krzyśko, 1997, s. 42].

Jednym z zadań teorii wiarygodności jest wyznaczenie wartości współczynnika wiarygodności Z_i. Mała wartość współczynnika oznacza, że składka kolektywna jest bardziej wiarygodna dla ubezpieczyciela niż składka indywidualna. Współczynnik Z_i jest w przybliżeniu równy 1, gdy historia szkód dla danej polisy czy grupy polis jest długa i wykazuje małą zmienność w czasie lub gdy kontrakty (grupy polis) są bardzo zróżnicowane między sobą pod względem historii szkód.

Historycznie pierwszym modelem teorii wiarygodności był model Bühlmanna [Bühlmann, 1967], w którym zakłada się, że portfel polis można podzielić na N podgrup, z których każda zawiera jednakową liczbę polis, dla których dostępne są dane o szkodach z t okresów.

2. Model Bühlmanna-Strauba

Model Bühlmanna-Strauba to zmodyfikowany model Bühlmanna, w którym liczba polis wchodzących w skład poszczególnych podgrup portfela nie musi być jednakowa oraz który uwzględnia wagi kontraktów w portfelu. Liczba polis również może się zmieniać okresowo [Denuit i in., 2007, s. 126].

Model znajduje swe zastosowanie szczególnie, gdy pojedyncza polisa lub mała podgrupa polis w znaczący sposób różni się pod względem profilu ryzyka od pozostałych. Jest to model klasyfikacji jednoczynnikowej. Model uwzględnia wagi (tzw. wolumen ryzyka) w_{ij} zmiennych losowych X_{ij}. Jeżeli zmienna losowa X_{ij} oznacza średnią arytmetyczną z w_{ij} zmiennych losowych niezależnych o jednakowych rozkładach, to liczby w_{ij} są wagami naturalnymi. Aktuariusz może jednak ustalić własne wagi, które nie muszą być liczbami naturalnymi. W modelu tym historie ubezpieczenia mogą być różnej długości t_i dla różnych kontraktów i. Strukturę danych w modelu prezentuje tab. 1.

Tab. 1. Struktura danych w modelu Bühlmanna-Strauba

Grupy polis	Lata ubezpieczenia			
	1	2	...	t
1	x_{11} w_{11}	x_{12} w_{12}	...	x_{1t} w_{1t}
2	x_{21} w_{21}	x_{22} w_{22}	...	x_{2t} w_{2t}
...	...	...	...	...
N	x_{N1} w_{N1}	x_{N2} w_{N2}	...	x_{Nt} w_{Nt}

Źródło: [Jasiulewicz, 2005].

Jak już wcześniej przyjęto, niech $\mathbf{X}_i = (X_{i1},..., X_{it})$ będzie wektorem obserwacji wielkości szkód (lub liczby szkód) dla i-tej polisy (i-tej podgrupy polis) przez t ostatnich lat, a zmienna losowa Θ_i, reprezentuje strukturę ryzyka w portfelu.

Założenia modelu Bühlmanna-Strauba [Bühlmann, Straub, 1970]:

– dla danego i oraz $\Theta_i=\theta_i$ zmienne losowe $X_{i1},...,X_{it}$ są niezależne oraz:

$$E(X_{ij}|\theta_i) = m(\theta_i) \tag{3}$$

$$Var(X_{ij}|\theta_i) = \frac{s^2(\theta_i)}{w_{ij}} \tag{4}$$

– dla i=1,...,N, j=1,...,t, przy czym stałe w_{ij} są znane.

Pary (Θ_1, $\boldsymbol{X}_1$),...,(Θ_N, $\boldsymbol{X}_N$) są wzajemnie niezależne oraz zmienne losowe Θ_1,..., Θ_N są niezależne i mają jednakowe rozkłady.

Niech będą dane:

– średnia wysokości szkody dla i-tej podgrupy polis:

$$\overline{X}_{iw} = \sum_{j=1}^{t} \frac{w_{ij}}{w_i} X_{ij}, \quad w_i = \sum_{j=1}^{t} w_{ij} \tag{5}$$

– średnia wysokość szkody dla całego portfela:

$$\overline{X}_{ww} = \sum_{i=1}^{N} \frac{w_i}{w} \overline{X}_{iw}, \quad w = \sum_{i=1}^{N} w_i \tag{6}$$

– parametry struktury ryzyka w portfelu:

$$\mu = Em(\Theta_i) = EX_{ij}, \quad \varphi = Es^2(\Theta_i), \quad \psi = Var(m(\Theta_i)) \tag{7}$$

gdzie:

μ – kolektywna składka netto, która jest średnią ważoną z indywidualnych składek netto $m(\theta_i)$

φ – opisuje przeciętną zmienność roszczeń w grupie (zmienność wewnątrz grupy)

ψ – opisuje zmienność roszczeń między grupami

Można wykazać, że jeżeli spełnione są założenia modelu Bühlmanna-Strauba, to [Kass i in., 2001, s. 144; Johansson, Ohlsson, 2010]:

– najlepszy niejednorodny liniowy predyktor $\widetilde{m}_i = E(X_{i\,n+1} | \mathbf{X}_i)$ składki netto $m(\Theta_i)$ w sensie najmniejszego błędu średniokwadratowego jest postaci:

$$\widetilde{m}_i = Z_i \overline{X}_{iw} + (1 - Z_i)\mu \tag{8}$$

gdzie współczynnik zaufania wynosi $Z_i = \dfrac{w_i \psi}{w_i \psi + \varphi}$.

– najlepszy jednorodny liniowy predyktor $\widetilde{m}_i^*$ składki netto $m(\Theta_i)$ w sensie najmniejszego błędu średniokwadratowego jest postaci:

$$\widetilde{m}_i^* = Z_i \overline{X}_{iw} + (1 - Z_i)\overline{X}_{zw} \tag{9}$$

gdzie współczynnik zaufania wynosi $Z_i = \dfrac{w_i \psi}{w_i \psi + \varphi}$ oraz
$\overline{X}_{zw} = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{Z_i}{Z} \overline{X}_{iw}, \quad Z = Z_1 + ... + Z_N$.

Można wykazać, że jeżeli spełnione są założenia modelu Bühlmanna-Strauba, to nieobciążone estymatory parametrów struktury w portfelu są postaci [Kass i in., 2001, s. 157]:

$$\hat{\mu} = \overline{X}_{zw}\,,\ \hat{\varphi}_N = MSW\,,\ \hat{\psi} = \frac{w(N-1)(MSB - MSW)}{w^2 - \sum_{i=1}^{N} w_i^2} \tag{10}$$

gdzie:

$SSW = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{t} w_j \, (X_j - \overline{X}_i)^2$ – ważona suma kwadratów odchyleń wewnątrz grup

$MSW = \dfrac{SSW}{(t-1)N}$ – średnia ważona suma kwadratów odchyleń wewnątrz grup

$SSB = \sum_{i=1}^{N} w_i (\overline{X}_{iw} - \overline{X}_{ww})^2$ – ważona suma kwadratów odchyleń między grupami

$MSB = \dfrac{SSB}{N-1}$ – średnia ważona suma kwadratów odchyleń między grupami

Jeżeli spełnione są założenia modelu Bühlmanna-Strauba, to błędy średniokwadratowe jednorodnego i niejednorodnego predyktora zaufania składki netto $m(\Theta_i)$ wynoszą odpowiednio [Daykin, Pentiäinen, Pesonen,1994, s. 186]:

$$MSE_i = E(m(\Theta_i) - \widetilde{m}_i)^2 = (1 - Z_i)\psi \tag{11}$$

$$MSE_i^* = E(m(\Theta_i) - \widetilde{m}_i^*)^2 = (1 - Z_i)\psi\left(1 + \frac{1 - Z_i}{Z}\right) \tag{12}$$

dla $i = 1, ..., N$.

3. Przykład zastosowania modelu do oszacowania stawek składki systemu *bonus-malus*

Badanie empiryczne przeprowadzono na podstawie danych pochodzących z portfela ubezpieczeń odpowiedzialności cywilnej posiadaczy pojazdów mechanicznych osób fizycznych z okresu kolejnych czterech lat. Do badania wylosowano ponad 100 tys. polis dla każdego z analizowanych lat (nie podano dokładnej liczebności próby ze względu na anonimowość danych). W dalszej części opracowania próbę będziemy nazywać portfelem. Dane w postaci zagregowanej o średniej liczbie i wartości wypłaconych odszkodowań według klas *bonus-malus* prezentują tab. 3 i 5. Podział ubezpieczonych na klasy *bonus-malus* jest zgodny z klasyfikacją ubezpieczyciela. Wyodrębniona liczba szkód oraz podział na klasy według wartości wypłacanych odszkodowań jest spójny z taryfikacją ubezpieczyciela.

W tab. 2 przedstawiono system *bonus-malus* badanego towarzystwa ubezpieczeniowego (nieznacznie zmodyfikowany w celu zachowania anonimowości zakładu ubezpieczeń). System ten składa się z 10 klas, w tym trzech ze zwyżką składki i sześciu ze zniżką składki. Ubezpieczeni są przydzielani do poszczególnych klas w danym roku na podstawie liczby szkód zgłoszonych w roku poprzednim.

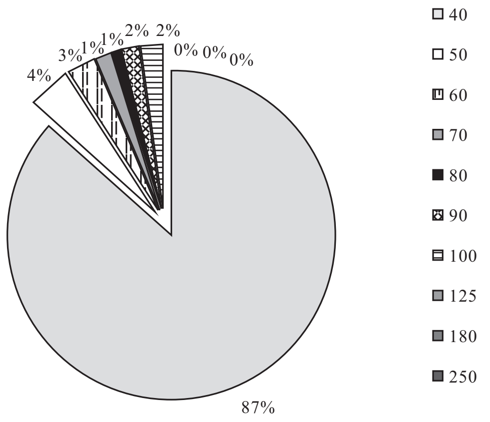
Tab. 2. System *bonus-malus* badanego towarzystwa ubezpieczeniowego

Klasa BM	Stawka składki (%)	Klasa BM w zależności od liczby szkód w roku		
		0	1	≥2
1	40	1	3	10
2	50	1	4	10
3	60	2	5	10
4	70	3	6	10
5	80	4	7	10
6	90	5	8	10
7	100	6	9	10
8	125	7	10	10
9	180	8	10	10
10	250	9	10	10

Źródło: opracowanie własne.

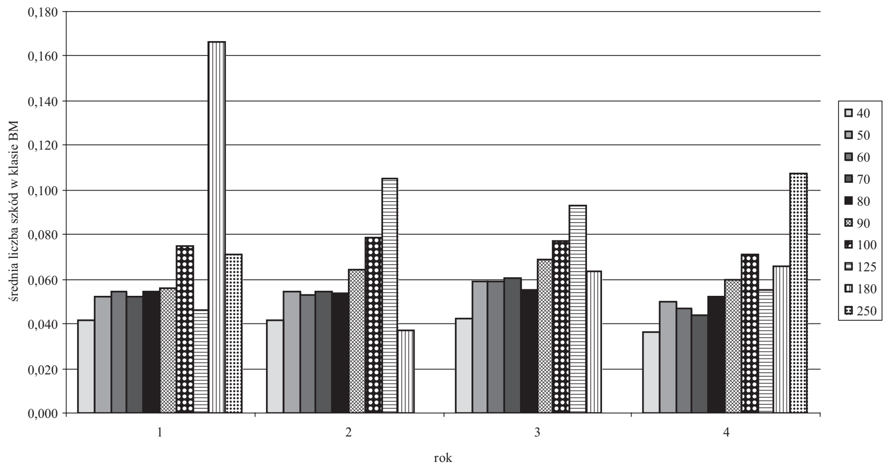
Na rys. 1 przedstawiono średni udział w badanych latach ubezpieczonych w poszczególnych klasach *bonus-malus*. Największą grupę (87%) w badanym okresie stanowili ubezpieczeni posiadający 60-procentową zniżkę składki (czyli przypisani do klasy pierwszej systemu, w której stawka składki wynosiła jej 40%). W klasie drugiej i trzeciej znajdowało się odpowiednio 4% i 3% ubezpieczonych. W każdej z klas zwyżkowych udział ubezpieczonych w każdym z badanych lat stanowił poniżej 1%.

Na rys. 2 przedstawiono średnią liczbę szkód w klasach *bonus-malus* w badanych latach. W analizowanym okresie można zaobserwować zróżnicowanie średniej liczby szkód w poszczególnych klasach. Na ogół największa „szkodowość” jest ob-



Rys. 1. Struktura ubezpieczonych średnio w badanych latach według klas *bonus-malus* w portfelu ubezpieczeń komunikacyjnych OC (%)

Źródło: opracowanie własne.

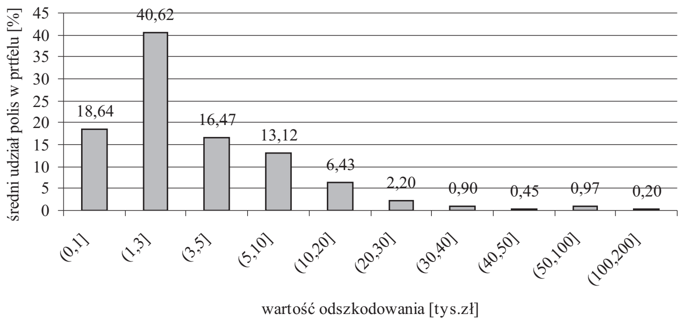


Rys 2. Średnia liczba wypłaconych odszkodowań w portfelu ubezpieczeń komunikacyjnych OC w badanych latach według klas *bonus-malus*

Źródło: opracowanie własne.

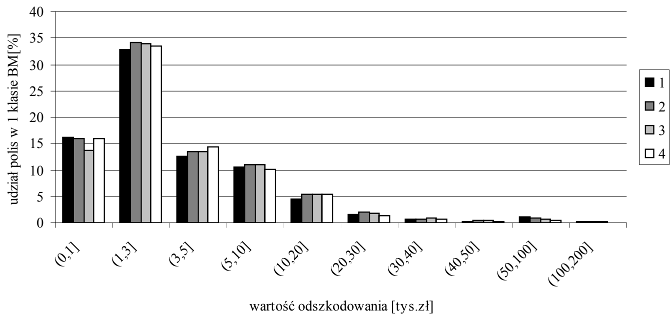
serwowana w klasach zwyżkowych oraz ze stawką równą 100% składki, natomiast najniższa – w pierwszej klasie systemu.

Na rys. 3–5 przedstawiono strukturę portfela pod względem wartości wypłaconych odszkodowań w poszczególnych klasach *bonus-malus*. Z rys. 3 wynika, że w portfelu najwięcej jest szkód o wartości od 1 do 3 tys. zł (średnio w badanych latach około 41%), następnie szkód do 1 tys. zł (średnio około 18%), potem szkód od 3 do 5 tys. zł (średnio około 17%) oraz szkód od 5 do 10 tys. zł (średnio około 13%). Odszkodowania do 10 tys. zł stanowią przeciętnie w badanych latach 89% wypłat w portfelu. Frakcja pozostałych wypłat wynosi średnio 11%. Należy jednak podkreślić, że przeciętna suma wypłat z wymienionych 89% polis wynosi około 246 tys. rocznie, a z pozostałych 11% polis to ponad 300 tys. zł rocznie. Analizując rys. 4, można stwierdzić, że struktura wypłat w pierwszej klasie systemu (około 87% polis portfela) jest bardzo zbliżona do struktury wypłat w portfelu. Około 33% szkód portfela w każdym z badanych lat to szkody od 1 do 3 tys. zł, zgłaszane w klasie pierwszej, czyli klasie z maksymalną zniżką. Średnia wartość wypłaconego odszkodowania w każdej z klas zniżkowych to około 5,6 tys. zł. Klasa ze stawką składki równą 100% składki bazowej oraz klasy zwyżkowe są w większym stopniu zróżnicowane pod względem średniej wartości wypłat (por. rys. 5). Na rys. 4 przedstawiono średnią wartość wypłaconych odszkodowań w wyodrębnionych klasach *bonus-malus*.



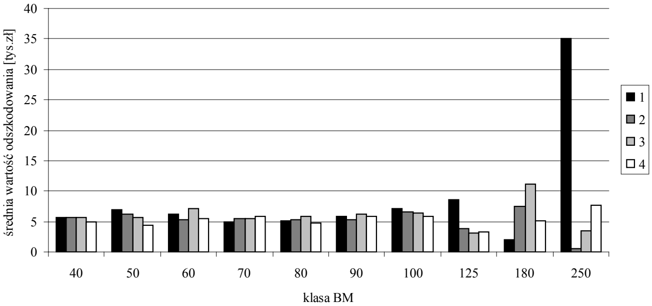
Rys. 3. Struktura polis w portfelu według wartości wypłaconych odszkodowań (średnio w badanych latach) (%)

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 4. Struktura wypłaconych odszkodowań w 1 klasie *bonus-malus* w portfelu ubezpieczeń komunikacyjnych OC w badanych latach

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 5. Średnia wartość wypłaconych odszkodowań w portfelu ubezpieczeń komunikacyjnych OC w badanych latach według klas *bonus-malus*

Źródło: opracowanie własne.

W ubezpieczeniach komunikacyjnych indywidualna składka netto w okresie t+1 jest wyznaczana na podstawie równania [Szymańska, 2014]:

$$\Pi(X,K) = (EX)\cdot(EK)\cdot b_{t+1} \tag{13}$$

gdzie:
$\Pi(X,K)$ – indywidualna składka netto w okresie t+1
EX – wartość oczekiwana pojedynczej szkody w portfelu
EK – wartość oczekiwana liczby szkód dla pojedynczej polisy w portfelu
b_{t+1} – stawka składki w okresie $t+1$

W literaturze aktuarialnej zakłada się niezależność między zmiennymi losowymi liczby i wartości szkód. Celem pracy jest wyznaczenie współczynnika b_{t+1} stanowiącego zwyżkę lub zniżkę składki zależną od klasy *bonus-malus*. Składki netto oszacowano za pomocą modelu Bühlmanna-Strauba. Modele oparte na teorii wiarygodności nie wymagają założeń co do postaci rozkładu zmiennej losowej opisującej wielkość indywidualnej szkody w portfelu oraz wartości parametrów tego rozkładu.

Składkę wiarygodności wyznaczono jako iloczyn oczekiwanej wartości wypłat oszacowanej za pomocą modelu Bühlmanna-Strauba w poszczególnych klasach *bonus-malus* (na podstawie danych z tab. 3) oraz oczekiwanej liczby szkód oszacowanej również na podstawie modelu Bühlmanna-Strauba (tab. 5). Rozważono dwa przypadki: gdy składka wiarygodności jest jednorodnym predykatorem oraz gdy jest niejednorodnym predykatorem składki netto. W tab. 4 i 6 przedstawiono wyniki estymacji. Stawki składki w poszczególnych klasach *bonus-malus* obliczono jako iloraz składki netto w danej klasie *bonus-malus* i składki netto w portfelu:

$${}_i b_{t+1} = \frac{\widetilde{m}_i \cdot {}^K\widetilde{m}_i}{\widetilde{m}_{portf} \cdot {}^K\widetilde{m}_{portf}} \tag{14}$$

$${}_i b^*_{t+1} = \frac{\widetilde{m}^*_i \cdot {}^K\widetilde{m}^*_i}{\widetilde{m}^*_{portf} \cdot {}^K\widetilde{m}^*_{portf}} \tag{15}$$

Wartości składek netto oraz stawek składki netto przedstawiono w tab. 7.

Tab. 3. Średnia wartość wypłaconego odszkodowania [tys. zł] w portfelu według klas *bonus-malus* w badanych latach

i (klasa BM)	j (rok)							
	1		2		3		4	
	X_{ij} [tys. zł]	w_{ij} [%]	X_{ij} [tys. zł]	w_{ij} [%]	X_{ij} [tys. zł]	w_{ij} [%]	X_{ij} [tys. zł]	w_{ij} [%]
1	5,67	80,76	5,68	84,00	5,57	81,39	4,85	82,18
2	6,85	6,32	6,13	5,60	5,73	3,61	4,45	5,77
3	6,13	2,90	5,34	2,15	7,13	4,48	5,52	3,43
4	4,94	1,84	5,42	1,53	5,40	2,11	5,87	1,65
5	5,15	1,34	5,21	1,39	5,79	1,62	4,79	1,83
6	5,76	2,60	5,21	1,61	6,18	2,03	5,84	2,51
7	7,08	4,08	6,63	3,65	6,32	4,67	5,81	2,52
8	8,60	0,06	3,83	0,05	3,06	0,05	3,21	0,05
9	2,00	0,08	7,50	0,01	11,20	0,03	5,06	0,05
10	35,00	0,01	0,50	0,01	3,50	0,01	7,75	0,01

X_{ij} – średnia wartość wypłaconego odszkodowania w i-tej grupie w okresie j w tys. zł; w_{ij} – udział polis w i-tej grupie portfela w okresie j w (%)

Źródło: opracowanie własne.

Tab. 4. Współczynnik wiarygodności, oczekiwana wartość szkód wyznaczona metodą wiarygodności (tys. zł) oraz błąd estymacji dla klas *bonus-malus*

i	Z_i	$\widetilde{m}_i^*$ [tys. zł]	$\widetilde{m}_i$ [tys. zł]	MSE_i^* [tys. zł]	MSE_i [tys. zł]
1	0,7856	5,46	5,43	0,007132	0,006229
2	0,1845	5,63	5,52	0,036744	0,023686
3	0,1326	5,72	5,60	0,039969	0,025194
4	0,0748	5,62	5,49	0,043683	0,026873
5	0,0661	5,61	5,48	0,044257	0,027128
6	0,0878	5,65	5,52	0,042835	0,026495
7	0,1434	5,75	5,63	0,039293	0,024882
8	0,0022	5,63	5,49	0,048534	0,028982
9	0,0017	5,63	5,50	0,048567	0,028996
10	0,0004	5,64	5,50	0,048656	0,029034

Źródło: opracowanie własne.

Tab. 5. Średnia liczba szkód w portfelu według klas *bonus-malus* w badanych latach

i (klasa BM)	j (rok)							
	1		2		3		4	
	K_{ij}	w_{ij} [%]	K_{ij}	w_{ij} [%]	K_{ij}	w_{ij} [%]	K_{ij}	w_{ij} [%]
1	0,041	84,97	0,042	88,20	0,043	86,55	0,036	86,72
2	0,052	5,37	0,054	4,49	0,059	2,79	0,050	4,51
3	0,055	2,36	0,053	1,80	0,059	3,50	0,047	2,78
4	0,052	1,54	0,054	1,19	0,061	1,59	0,044	1,49
5	0,055	1,13	0,054	1,10	0,055	1,31	0,052	1,37

i (klasa BM)	*j* (rok)							
	1		2		3		4	
6	0,056	2,06	0,064	1,11	0,069	1,36	0,060	1,63
7	0,075	2,50	0,079	2,07	0,077	2,85	0,071	1,43
8	0,047	0,04	0,105	0,02	0,093	0,02	0,056	0,03
9	0,167	0,02	0,037	0,01	0,063	0,02	0,066	0,03
10	0,071	0,01	0,000	0,01	0,000	0,01	0,107	0,01

K_{ij} – średnia liczba szkód w *i*-tej grupie w okresie *j*; w_{ij} – udział polis w *i*-tej grupie portfela w okresie *j* (%)

Źródło: opracowanie własne.

Tab. 6. Współczynnik wiarygodności, oszacowana metodą wiarygodności liczba szkód oraz błąd estymacji dla klas *bonus-malus*

i	Z_i	${}^{K}\widetilde{m}_i^*$	${}^{K}\widetilde{m}_i$	MSE_i^*	MSE_i
1	0,9980	0,0404	0,0404	0,00000035	0,00000035
2	0,9592	0,0534	0,0529	0,00000727	0,00000723
3	0,9404	0,0540	0,0532	0,00001065	0,00001056
4	0,8940	0,0532	0,0517	0,00001905	0,00001876
5	0,8788	0,0542	0,0525	0,00002183	0,00002144
6	0,8959	0,0619	0,0605	0,00001870	0,00001842
7	0,9265	0,0743	0,0733	0,00001315	0,00001301
8	0,1430	0,0584	0,0467	0,00017084	0,00015169
9	0,1050	0,0587	0,0464	0,00017930	0,00015842
10	0,0476	0,0558	0,0428	0,00019223	0,00016858

Źródło: opracowanie własne.

Uwzględniając równania (13) oraz (8) i (9), wartość składki netto (składki wiarygodności) wyznaczono odpowiednio z wzorów:

$$\Pi_i(X,K) = \widetilde{m}_i \cdot {}^{K}\widetilde{m}_i \cdot {}_{i}b_{t+1} \tag{16}$$

$$\Pi_i(X,K) = \widetilde{m}_i^* \cdot {}^{K}\widetilde{m}_i^* \cdot {}_{i}b_{t+1}^* \tag{17}$$

Wartości składek wiarygodności oraz stawek składki netto przedstawiono w tab. 7.

Tabela 7. Składki wiarygodności oraz stawki składki netto według klas *bonus-malus*

	Składka wiarygodności [tys. zł]		Stawka składki	
Klasa BM	$\widetilde{m}_i^* \cdot {}^{K}\widetilde{m}_i^*$	$\widetilde{m}_i \cdot {}^{K}\widetilde{m}_i$	${}_{i}b_{t+1}^*$	${}_{i}b_{t+1}$
1	0,22030	0,21894	0,69	0,93
2	0,30103	0,29185	0,95	1,24
3	0,30902	0,29789	0,97	1,27
4	0,29895	0,28409	0,94	1,21
5	0,30389	0,28772	0,96	1,23
6	0,35010	0,33432	1,10	1,42
7	0,42684	0,41228	1,34	1,76

	Składka wiarygodności [tys. zł]		Stawka składki	
Klasa BM	$\widetilde{m}_i^* \cdot^K \widetilde{m}_i^*$	$\widetilde{m}_i \cdot^K \widetilde{m}_i$	${}_i b_{t+1}^*$	${}_i b_{t+1}$
8	0,32896	0,25629	1,03	1,09
9	0,33057	0,25497	1,04	1,09
10	0,31459	0,23502	0,99	1,00
portfel	0,31794	0,23473	1,00	1,00

Źródło: opracowanie własne.

Podsumowanie

Wyznaczone metodą wiarygodności stawki składki w poszczególnych klasach *bonus-malus* różnią się znacznie od stosowanych w analizowanym towarzystwie ubezpieczeniowym. Oszacowane stawki są wyższe niż stosowane przez ubezpieczyciela w klasach zniżkowych, natomiast niższe w klasach zwyżkowych. Z analiz wynika, że maksymalna zniżka powinna wynosić 30%. Klasa siódma, która w badanym towarzystwie ubezpieczeniowym jest klasą ze stawką 100% składki, w przeprowadzonych analizach powinna być klasą ze zwyżką składki, wynoszącą co najmniej 30% składki. Należy jednak zwrócić uwagę na małe wartości współczynników wiarygodności przy estymacji wartości szkód we wszystkich klasach *bonus-malus* oprócz pierwszej.

Bibliografia

Bühlmann H., *Experience Rating and Credibility*, “ASTIN Bulletin” 1967, No. 4 (3).

Bühlmann H., Straub E., *Glaubwürdigkeit für Schadensätze*, “Mitteilungen der Vereiningung scheizerischer Vesicherungsmathematiker” 1970.

Daykin C.D., Pentiäinen T., Pesonen M., *Practical Risk Theory for Actuaries*, Chapman & Hall, London 1994.

Denuit M., Marechal X., Pitrebois S., Walhin J.F., *Actuarial Modelling of Claim Counts. Risk Classification, Credability and Bonus-Malus Systems*, Wiley & Sons, England 2007, **DOI: https://doi.org/10.1002/9780470517420**.

Jasiulewicz H., *Teoria zaufania. Modele aktuarialne*, Wydawnictwo AE im. Oskara Langego we Wrocławiu, Wrocław 2005.

Johansson B., Ohlsson E., *Non-life Insuranse Pricing with Generalized Lineał Models*, Spinger-Verlag, Berlin 2010.

Kaas R., Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M., *Modern Actuarial Risk Theory*, Kluwer, Boston 2001.

Kowalczyk P., Poprawska E., Ronka-Chmielowiec W., *Metody aktuarialne*, PWN, Warszawa 2006.

Krzyśko M., *Statystyka matematyczna*, cz. 2, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 1997.

Lemaire J., *Bonus-malus Systems in Automobile Insurance*, Kluwer, Boston 1995, **DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-011-0631-3**.

Ostasiewicz W. (red.), *Modele aktuarialne*, Wydawnictwo AE im. O. Langego we Wrocławiu, Wrocław 2000.

Szymańska A., *Statystyczna analiza systemów bonus-malus w ubezpieczeniach komunikacyjnych*, Wydawnictwo UŁ, Łódź 2014.

The Application of Bühlmann-Straub Model to the Estimation of Net Premium Rates in the Motor Third-Party Liability Insurance of Vehicle Owners

One of the elements used in the process of tariff calculation of premiums in motor liability insurance is a *bonus-malus* system. This systems takes into account the “claims ratio” by means of increases and discounts of the base premium called net premium rates. The aim of this work is to propose an estimation method of the net premium rates in the groups of the motor third-party liability insurance portfolio of individuals. One of the maximum likelihood models, called the Bühlmann-Straub model was used for the premium estimation.

Zastosowanie modelu Bühlmanna-Strauba do estymacji stawek składki netto w systemach *bonus-malus* ubezpieczeń odpowiedzialności cywilnej posiadaczy pojazdów mechanicznych

Jednym z elementów procesu taryfikacji w ubezpieczeniach odpowiedzialności cywilnej posiadaczy pojazdów mechanicznych jest system *bonus-malus*. Uwzględnia on w składce „szkodowość” ubezpieczonego przez zwyżki i zniżki składki bazowej, nazywane stawkami składki netto. Celem pracy jest zaproponowanie metody estymacji stawek składki netto w klasach *bonus-malus* portfela ubezpieczeń komunikacyjnych OC osób fizycznych. Do szacowania składki wykorzystano jeden z modeli teorii największej wiarygodności – tzw. model Bühlmanna-Strauba.